Leçon 233 : Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres. Exemples.

Allaire - Kaber

Isenmann - Pecatte (dev 2)

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Préliminaires théoriques

1. Norme matricielle et rayon spectral

Définition 1.1 Une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite matricielle si elle vérifie : pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Exemples 1.2

$\|.\|_F : A \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$ est une norme matricielle

$\|.\| : A \longmapsto \max_{i,j} |a_{i,j}|$ n'est pas une norme matricielle, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $1 = \|A\|^2 < \underbrace{\|A^2\|}_{=n}$

Définition 1.3 Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On lui associe une norme matricielle, dite subordonnée à cette norme vectorielle, définie par : $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Contre-exemple 1.4

$\|.\|_F$ n'est pas subordonnée car $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$

Proposition 1.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

- $\|A\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$
- $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

Définition 1.6 On appelle valeur singulière de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute racine carrée positive de valeur propre de A^*A.

Proposition 1.7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ est la plus grande valeur singulière de A.

Définition 1.8 On définit le rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\rho(A) := \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp\, A\}$.

Remarque 1.9 Le rayon spectral n'est pas une norme. En effet, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $\rho(A) = 0$.

Proposition 1.10 Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\rho(A) \leq \|A\|$.

Contre-exemple 1.11

pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(A) = 2 > \|A\| = 1$ où $\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|$

2. Conditionnement

Définition 1.12 Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée. On appelle conditionnement de $A \in GL_n(\mathbb{K})$ la valeur définie par : $\mathrm{cond}(A) := \|A\|.\|A^{-1}\|$.

Proposition 1.13 Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $b \neq 0 \in \mathbb{K}^n$. Alors :

- si $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$ alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
- si $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

De plus, ces inégalités sont optimales.

Proposition 1.14 Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors :

- $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$
- $\forall \alpha \neq 0$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$
- $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_1(A)}{\mu_n(A)}$ μ_1 plus petit valeur singulière et μ_n la plus grande
- si A est normale, $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$

II. Résolution de systèmes linéaires

On s'intéresse à $Ax = b$ avec A inversible, b vecteur appelé second membre et x vecteur inconnu.

1. Méthodes directes de résolution

Théorème 2.1 (méthode d'élimination de Gauss) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $M \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $T = MA$ soit triangulaire.

Remarque 2.2 La complexité algorithmique de cette méthode est $O(n^3)$.

Théorème 2.3 (factorisation LU) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les mineurs sont inversibles. Alors il existe un unique couple (L,U) avec L triangulaire inférieure à diagonale unité, U triangulaire supérieure. développement 1

Remarque 2.4 En particulier, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a le résultat.

Algorithme 2.5

```
donnée : A , sortie : matrice contenant L et U
pour k allant de 1 à n-1 :                (étape k)
    pour i allant de k+1 à n :            (ligne i)
        a_{i,k} = a_{i,k} / a_{k,k}       (nouvelle colonne de L)
        pour j allant de k+1 à n :
            a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}
```

Remarque 2.6 La complexité algorithme est $O(n^3)$.

Conséquence 2.7 Les méthodes d'élimination de Gauss ou de factorisation LU sont sensiblement plus efficaces que l'utilisation des formules de Cramer.

2. Méthodes itératives

Définition 2.8 Soit A une matrice inversible. On appelle décomposition régulière de A un couple (M,N) avec M inversible (et facile à inverser dans la pratique) tel que $A = M - N$.

Une méthode itérative basée sur la décomposition régulière (M,N) est définie par

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $Mx_{k+1} = Nx_k + b$, $k \geq 0$

Remarque 2.9 Si $(x_k)_k$ converge alors par passage à la limite, $(M-N)x = Ax = b$, donc la limite x est solution du système.

Définition 2.10 On dit qu'une méthode itérative est convergente si, quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite des itérés $(x_k)_k$ converge.

Théorème 2.11 (Householder) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors une norme subordonnée matricielle $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$. développement 2

Théorème 2.12 La méthode itérative associée à (M,N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Exemples 2.13

- méthode de Jacobi : $M = D$, $N = D - A$
- méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$, $N = F$ où $-E, -F$ partie inf, sup de A

III. Recherche d'éléments propres

Algorithme 3.1 (méthode de la puissance) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

```
donnée : A , sortie : a ≃ λ_max , x_k ≃ u_max vecteur propre associé
Initialisation :
    choisir x_0 ∈ R^n tel que ||x_0|| = 1
    choisir ε petit
Itérations :
    tant que ||x_k - x_{k-1}||_2 > ε :
        y_k = A x_{k-1}
        x_k = y_k / ||y_k||_2
    a = ||y_k||_2
```

Théorème 3.2 Soit A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres (ordonnées) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associés à $e_1, \dots, e_n$. On suppose que λ_n la valeur propre de plus grand module est simple et positive et que $x_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ avec $b_n \neq 0$. Alors la méthode de la puissance

converge i.e. $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_n$ et $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \pm e_n$.

De plus, $\big|\|y_k\| - \lambda_n\big| \leqslant c\left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right)^k$ et $\|x_k - x_\infty\| \leqslant c\left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right)^k$.

Remarque 3.3 L'hypothèse que $\lambda_n \in \mathbb{R}$ est cruciale, en revanche si elle est négative il suffit d'appliquer le théorème avec $-A$.

Algorithme 3.4 (méthode de la puissance inverse) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

donnée : A, sortie : $a \simeq \lambda_1$, $x_k \simeq u_1$ vecteur propre associé

Initialisation :

choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\|_2 = 1$

choisir ε

itérations :

tant que $\|x_k - x_{k-1}\|_2 > \varepsilon$:

Résoudre $Ay_k = x_{k-1}$

$x_k = y_k / \|y_k\|_2$

$a = 1 / \|y_k\|_2$

Théorème 3.5 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associés à une base orthonormée de vecteurs propres $e_1, \dots, e_n$. Supposons que λ_n est simple et positive et que x_0 n'est pas orthogonal à e_n. Alors la méthode de la puissance converge et $\big|\|y_k\| - \lambda_n\big| \leqslant c\left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right)^{2k}$.